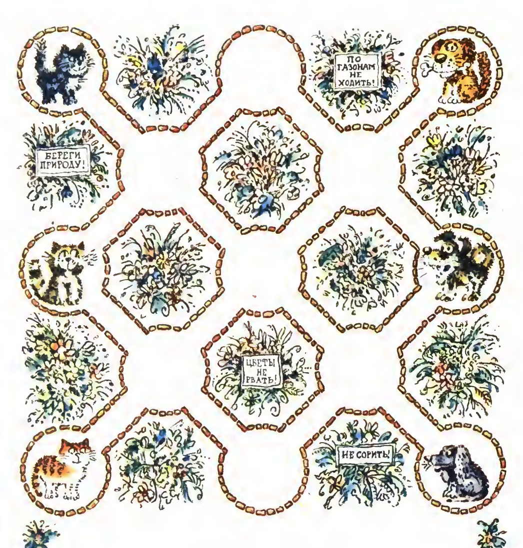


Кошки и собаки

Три умные собаки и три хитрые кошки после обоюдоострых контактов оказались на противоположных площадках сквера (см. рисунок) и занялись решением очень важной для обеих сторон задачи: *как им поменяться друг с другом местами, но при этом, чтобы не возникло новых потасовок, не только не встречаться друг с другом, но даже не оказываться на соседних площадках.*

В результате была избрана следующая стратегия: собаки и кошки сидят на площадках, но время от времени либо кошка, либо собака бежит по аллее на соседнюю площадку.

Кошки считают, что совместными усилиями за 32 перебежки (их и собачьих вместе) они смогут поменяться с собаками местами. Собаки с ними не согласны.

Кто прав?

Л. Мочалов

Спрашивайте — отвечаем

В редакцию пришло письмо из города Харькова от Степана Киржалова, ученика 9 класса. Вот что он пишет.

«В «Справочнике по элементарной математике» (Киев, 1973 год) я встретил любопытный способ решения иррационального уравнения

$$\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=2. \quad (*)$$

Возведя обе части этого уравнения в куб, получим

$$(8x+4)-3\sqrt[3]{8x+4}\sqrt[3]{8x-4}\times\left(\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}\right)-(8x-4)=8.$$

Учитывая, что по условию выражение в квадратных скобках должно быть равно 2, можем записать

$$-6\sqrt[3]{64x^2-16}=0,$$

откуда $x_1=1/2$, $x_2=-1/2$. *Я таким же способом попробовал решить другое уравнение*

$$\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1, \quad (**)$$

но оказалось, что из двух получившихся значений $x_1=1$, $x_2=0$ *только первое удовлетворяет уравнению. В чем же дело?»*

Поскольку ответ на письмо Степана Киржалова может представить интерес и для многих других читателей «Кванта», публикуем этот ответ на страницах журнала.

Прежде всего напомним читателям, что в математической литературе запись $\sqrt[3]{a}$ используется в двух смыслах (см. «Алгебра 8», М., «Просвещение», 1975, стр. 95).

Во-первых, символом $\sqrt[3]{a}$ обозначают н е о т р и ц а т е л ь н о е число, куб которого равен a; тогда этот символ определен только для $a\geqslant 0$. В новых школьных учебниках знак $\sqrt[3]{a}$ имеет именно такой смысл, так что, например, выражение $\sqrt[3]{8x-4}$ при $x=-1/2$ не определено.

Во-вторых, символом $\sqrt[3]{a}$ обозначают число, куб которого равен a; тогда этот символ определен при любом a. В упомянутой в письме С. Киржалова книге Г. П. Б е в з а, П. Ф. Ф и л ь ч а к о в а, К. И. Ш в е ц о в а, Ф. П. Я р е м ч у к а «Справочник по элементарной математике для поступающих в вузы» (Киев, «Наукова думка», 1973, стр. 152—153) знак $\sqrt[3]{a}$ применяется в этом смысле, так что, например, выражение $\sqrt[3]{8x-4}$ при $x=-1/2$ существует и равно -2.

Способ решения иррациональных уравнений с радикалами третьей степени, о котором пишет автор письма, применяется довольно часто. О нем упоминается и в названном «Справочнике», однако, к сожалению, там не указано, что, *решая уравнения таким способом, мы можем приобрести посторонние корни, и потому всегда нужно делать проверку*.

Убедиться в этом нетрудно. Мы сейчас проведем соответствующие рассуждения, тем более, что они весьма поучительны и показывают, как конкретно исследуется вопрос о равносильности уравнений и выясняются причины ее нарушения. Предварительно приведем одно алгебраическое тождество:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\tfrac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]; \quad (1)$$

для его доказательства достаточно раскрыть скобки в правой части.

Рассмотрим уравнение

$$\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}=\varphi(x) \quad (2)$$

и допустим, что x_0 — его корень, так что